TEOREMA GENERAL DEL TRANSPORTE

Referencia: Whitaker, S. “Introduction to fluid mechanics”. Prentice Hall, INC. USA(1968).
Nota: Las letras en “negrilla” corresponden a vectores.

El objetivo de este desarrollo es encontrar una ecuación general para evaluar la derivada total con respecto al tiempo de una propiedad intensiva, en condiciones tales que el volumen de control elegido se mueva con velocidad **w**. Este volumen será designado por $V_a(t)$. La velocidad **w** es una función del sistema de referencia elegido (el campo de velocidades está fijado por el observador) y del tiempo, y en algunos casos puede ser igual a la velocidad **v** con que se mueve el fluido.

Consideremos un volumen de control como el ilustrado en la siguiente figura:

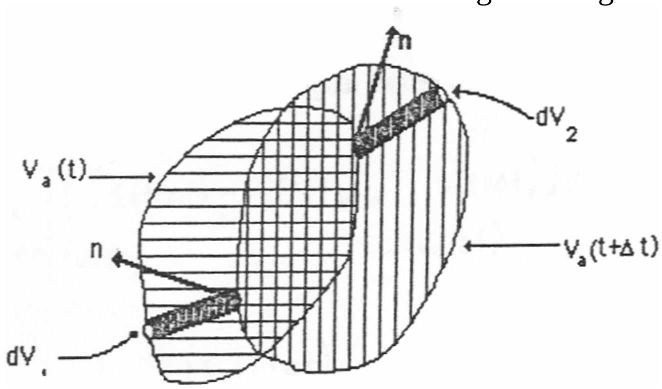

Figura 1: Volumen de control empleado en la deducción.

Se desea determinar la derivada total con respecto al tiempo de alguna cantidad intensiva escalar (ϕ). Por definición:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_a(t)} \phi\, dV = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\displaystyle\int_{V_a(t+\Delta t)} \phi(t+\Delta t)\, dV - \int_{V_a(t)} \phi(t)\, dV}{\Delta t} \tag{1}$$

Si $V_a(t)$ se mueve con el tiempo, definiremos:

$V_1(\Delta t)$: Volumen dejado atrás al desplazarse $V_a(t)$ (designado en la Figura 1 por las líneas horizontales).

$V_2(\Delta t)$: Volumen adicional que ocupa $V_a(t)$ al desplazarse (designado en la Figura 1 por las líneas verticales).

Entonces: $V_a(t + \Delta t) = V_a(t) + V_2(\Delta t) - V_1(\Delta t)$ (2)

Por lo tanto la integral puede descomponerse en:

$$\int_{V_a(t+\Delta t)} \phi(t+\Delta t)\, dV = \int_{V_a(t)} \phi(t+\Delta t)\, dV + \int_{V_2(\Delta t)} \phi(t+\Delta t)\, dV - \int_{V_1(\Delta t)} \phi(t+\Delta t)\, dV \tag{3}$$

Reemplazando en (1):

$$\frac{d}{dt}\int_{V_a(t)} \phi \, dV = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\displaystyle\int_{V_a(t)} \phi(t+\Delta t)\, dV + \int_{V_2(\Delta t)} \phi(t+\Delta t)\, dV - \int_{V_1(\Delta t)} \phi(t+\Delta t)\, dV - \int_{V_a(t)} \phi(t)\, dV}{\Delta t}\right] \tag{4}$$

Reagrupando los términos con igual límite de integración:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_a(t)} \phi \, dV = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\displaystyle\int_{V_a(t)} [\phi(t+\Delta t) - \phi(t)] dV + \int_{V_2(\Delta t)} \phi(t+\Delta t)\, dV - \int_{V_1(\Delta t)} \phi(t+\Delta t)\, dV}{\Delta t}\right] \tag{5}$$

Pero: $$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\displaystyle\int_{V_a(t)} [\phi(t+\Delta t) - \phi(t)] dV}{\Delta t}\right] = \int_{V_a(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV \tag{6}$$

Sustituyendo, la Ecuación (5) queda:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_a(t)} \phi \, dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\displaystyle\int_{V_2(\Delta t)} \phi(t+\Delta t)\, dV - \int_{V_1(\Delta t)} \phi(t+\Delta t)\, dV}{\Delta t}\right] \tag{7}$$

El siguiente paso en este análisis es sustituir las integrales de volumen de la ecuación anterior por integrales de superficie. Consideremos el cilindro generado por el elemento de superficie dA cuando se mueve el volumen de control, tal como se indica en la Figura 1.

dA_1: Es el elemento diferencial de área que, al desplazarse el volumen de control V_a, genera dV_1.
dA_2: Es el elemento diferencial de área que, al desplazarse el volumen de control V_a, genera dV_2.

En la Figura 2 se examinan uno de estos cilindros de longitud L y área transversal dA.

$L = w\,\Delta t$ donde: w es la magnitud del vector **w**. Si se expresa el vector velocidad **w**, en función de un vector unitario λ (el cual le da la dirección), se puede escribir: $\mathbf{w} = \lambda\, w$.

Por otro lado, el volumen dV puede escribirse: $dV = L\, dA_p$. (8)

Donde dA_p es el área dA proyectada en un plano perpendicular a λ. $dA_p = dA\ \mathbf{n.}\lambda = dA\ (\pm \cos\beta)$, siendo β el ángulo entre **n** y λ. El uso del signo "+" o del signo "–" dependerá de si el ángulo β es mayor o menor de $\pi/2$.

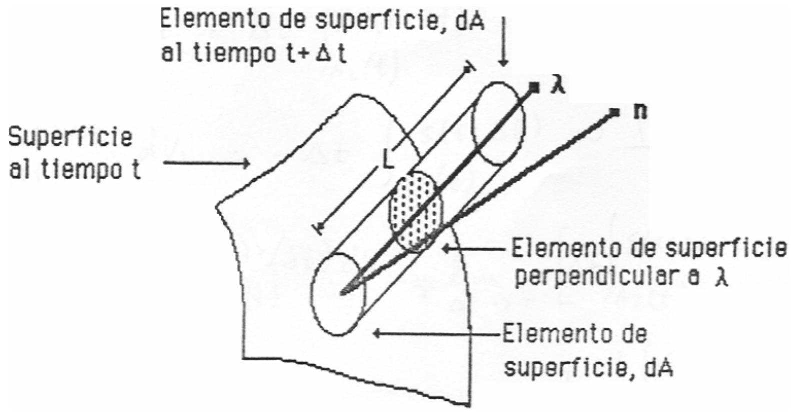

Figura 2: Superficie de control empleada en la deducción.

Sustituyendo en (8): $dV = \pm L\ \mathbf{n.}\lambda dA = \pm w\ \mathbf{n.}\lambda\ \Delta t\ dA$ (9)

Aplicando este resultado a dV_1 y dV_2:

$dV_1 = -\ w\ \mathbf{n.}\lambda\ \Delta t\ dA_1$
$dV_2 = +\ w\ \mathbf{n.}\lambda\ \Delta t\ dA_2$

Reemplazando en la Ecuación (7):

$$\frac{d}{dt}\int_{V_a(t)} \phi\, dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta t \displaystyle\int_{A_2(t)} \phi(t+\Delta t)\, w\, \mathbf{n.\lambda}\, dA_2 + \Delta t \displaystyle\int_{A_1(t)} \phi(t+\Delta t)\, w\, \mathbf{n.\lambda}\, dA_1}{\Delta t}\right] \tag{10}$$

Tomando el límite indicado y teniendo en cuenta que $A_1(t) + A_2(t) = A_a(t)$, se llega al Teorema General del Transporte:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{V_a(t)} \phi\, dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{A_a(t)} \phi\ \mathbf{w.n}\, dA} \tag{11}$$

Aplicando el Teorema de la Divergencia, la ecuación anterior se puede escribir:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_a(t)} \phi\, dV = \int_{V_a(t)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla.\phi\ \mathbf{w}\right) dV \tag{12}$$

Cuando el volumen de control está fijo en el espacio (**w** = 0): $\frac{d}{dt}\int_V \phi\, dV = \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV$ (13)

El límite de la integral se cambia de $V_a(t)$ a V para indicar que no cambia con t.

Cuando **w** es igual a la velocidad del fluido **v**, se llega al Teorema de Transporte de Reynolds:

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_{V_m(t)} \phi\, dV \equiv \int_{V_m(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \phi\ \mathbf{v.n}\, dA} \quad (14)$$

donde: D/Dt: Derivada material o sustancial.
Vm(t): Volumen material.
Sm(t): Superficie material.

Toda la deducción anterior fue hecha para un escalar ϕ, sin embargo, puede extenderse a un vector. Por ejemplo, en el caso de la velocidad se necesita aplicar el Teorema del Transporte a tres escalares v_x, v_y y v_z y multiplicar por los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, respectivamente. Luego, sumando las tres componentes se llega a:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{V_a(t)} \mathbf{v}\, dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dV + \int_{A_a(t)} \mathbf{v}\,.(\mathbf{w.n})\, dA} \quad (15)$$

APLICACIÓN: CONSERVACIÓN DE LA MASA

Masa del volumen de control (M): $M = \int_V \rho\, dV$, ya que ρ es una propiedad intensiva.

La Ley de Conservación de la Masa requiere que M sea una constante ya que la masa no se crea ni se destruye. Un volumen material es un sistema cerrado, por lo tanto, de la Ecuación (14):

$$\frac{DM}{Dt} = 0 = \frac{D}{Dt}\int_{V_m(t)} \rho\, dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \rho\ \mathbf{v.n}\, dA$$

Aplicando el Teorema de la Divergencia: $\frac{DM}{Dt} = 0 = \int_{V_m(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho\ \mathbf{v})\right] dV$

De la relación anterior se desprende que: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho\ \mathbf{v}) = 0$: Ecuación de Continuidad.

Si el flujo es incompresible y permanente: $\nabla.\ \mathbf{v} = 0$